



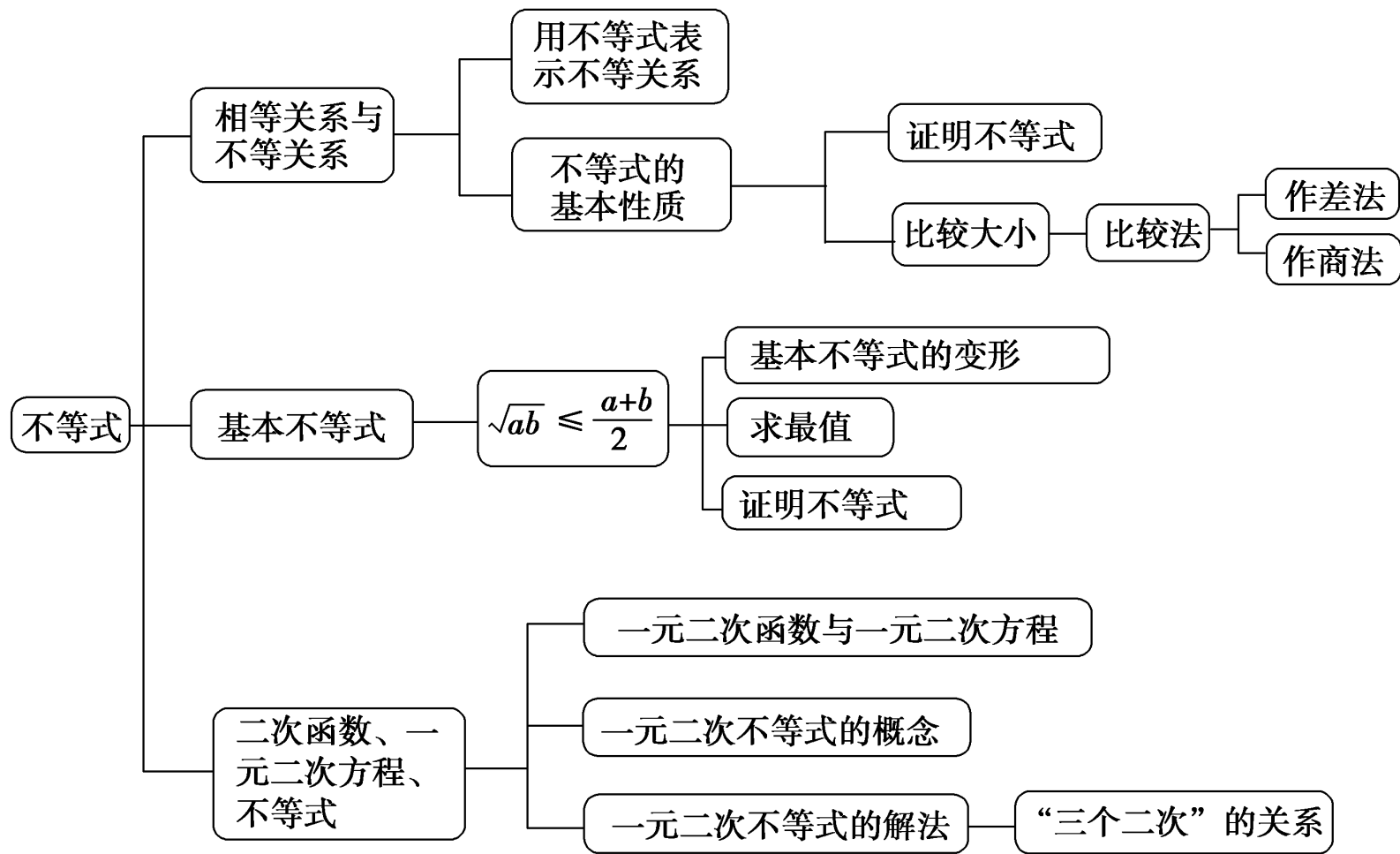
## 第二章

# 一元二次函数、方程和不等式

## 复习与小结

# 本章知识结构

## 体系构建



## 回顾思考

1. 不等关系是普遍存在的；用来表示不等关系的式子叫不等式。利用不等式(组)刻画不等关系时应注意下列问题：

(1) 问题中的不等关系有哪些，是否需要这些不等关系同时成立；(2) 每一个不等关系各是怎样的；(3) 需不需要设出变量。

2. 两个实数大小关系的基本事实：

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0;$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0;$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

利用这个事实可以采取作差法可以对一些代数式的大小进行了比较也可以证明不等式：

(1) 作差；

(2) 变形；

目的：便于判定差的符号

常用的方法：因式分解、配方、通分、分子有理化等

(3) 定号；

当差的符号不确定时，一般需要分类讨论

(4) 作结论。

根据当差的正负与实数大小关系的基本事实作出结论

### 3.等式的基本性质

- (1)若 $a = b$ , 则 $b = a$ ;
- (2)若 $a = b, b = c$ , 则 $a = c$ ;
- (3)若 $a = b$ , 则 $a \pm c = b \pm c$ ;
- (4)若 $a = b$ , 则 $ac = bc$ ;
- (5)若 $a = b, c \neq 0$ , 则 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ .

### 不等式的性质:

性质1(对称性):  $a > b \Leftrightarrow b < a$  性质2(传递性):  $a > b, b > c \Rightarrow a > c$

性质3(可加性):  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$  推论:  $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$  (移项)

性质4(可乘性)  $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

(乘正保序, 乘负反序):  $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$

基本性质

性质5(同向可加性):  $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$  性质6(同正同向可乘性):  $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$

性质7(同正可乘方性):  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in N, n \geq 2)$

注: ①性质1,3可逆;

②性质5,6可推广到多个同向不等式;

③性质5,6,7可将“同正”扩大到“同为非负数”;

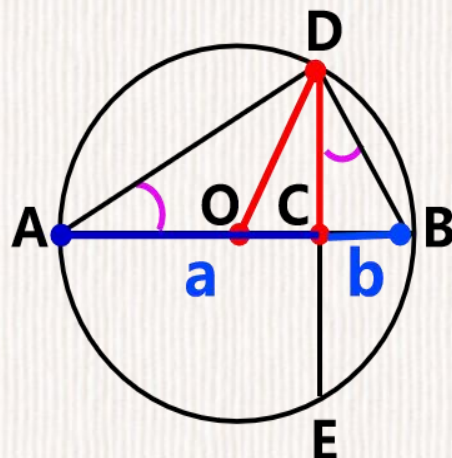
④由性质还可得到同号倒数反序  $ab > 0$ 时:  $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

## 4.基本不等式及其推导

对任意的  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 有

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

当且仅当  $a = b$  时, 等号成立



(1)基本不等式的常见变形:

①  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  ;

②  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

代数特征:

两个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数, 当且仅当这两个正数相等时, 二者相等.

几何解释:

圆O的半弦CD不大于圆的半径OD, 当且仅当C与圆心O重合时, 二者相等.

(2)基本不等式的推导和证明:

①利用两个实数大小关系的基本事实用作差法得出;

②由重要不等式得出; ③执果索因, 用分析法得出.

## 5.用基本不等式求最值的条件

一正二定三相等

(1)a、b要同为正数；

(2)求a+b的最值时，ab应为定值；

求ab的最值时，a+b应为定值；

(3)当a=b时，

由  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  得，ab有最大值： $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

由  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  得，a+b有最小值： $2\sqrt{ab}$

若代数式可以化为两正数之和且积为定值的形式，或是两正数之积且和为定值的形式，并在这两正数可以取得相等时，就可以用基本不等式来求其最值。（事实上，两个数是非负也成立）

用基本不等式解决数学中的最值问题

①直接应用类；

②配凑定值类；

通用过添拆项，变系数，分离出常数或整式，化为积并使它们的和为定值，化为和并使它们的积为定值。

③条件最值类。

常量(如1)替换，变量替换(消元)

## 6.二次函数与一元二次方程、不等式的关系:

### (1)形式上

二次函数  
 $y = ax^2 + bx + c$

设  $y = 0$

一元二次方程  
 $ax^2 + bx + c = 0$

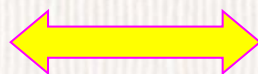
右边化为0,  
左边设为y

设  $y \neq 0$

一元二次不等式  
 $ax^2 + bx + c < 0$  (或  $> 0$ )

### (2)数值上

二次函数  
 $y = ax^2 + bx + c$  的零点



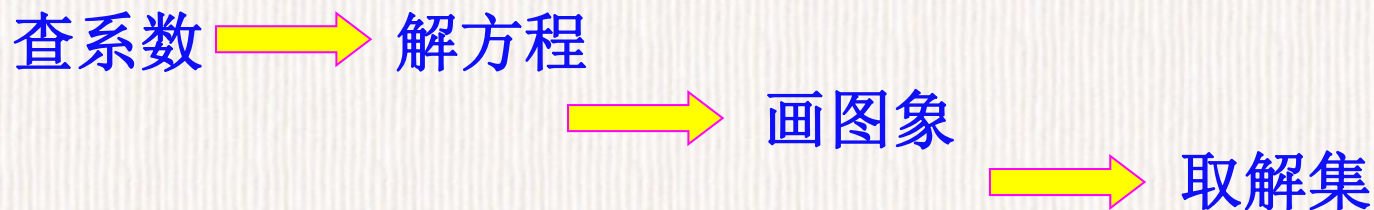
一元二次方程  
 $ax^2 + bx + c = 0$  的根



一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$   
(或  $< 0$ ) 解集的端点



## 7.利用“三个二次”间的关系解一元二次不等式的主要过程:



### (1)检查二次项系数

将不等式化为一般形式，并检查二次项系数  $a$  的正负，对于  $a < 0$  的不等式，将  $a$  化为正数。

### (2)解对应的方程

若  $\Delta \geq 0$ （分解因式亦可），求出方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的根；  
若  $\Delta < 0$ ，则方程  $ax^2 + bx + c = 0$  无根。

### (3)画图象

画出对应函数  $y = ax^2 + bx + c$  的大致图象。

### (4)取解集 ( $a > 0$ )

根据图象写出对应不等式的解集：

有根时：大于取两边，小于取中间，等于取根点

无根时：大于取  $\mathbf{R}$ ，小于、等于取  $\Phi$

## 8.基本不等式的应用

### (1)证明不等式

### (2)求最大值或最小值

①实际问题中的最值； ②数学中的最值。

### 一元二次不等式的应用

#### (1)解一元二次不等式

①不含参数一元二次不等式；

②含参数一元二次不等式。

当二次项系数不确定时：一般分二次项系数“大于0,小于0和等于0三种情况；

当对应方程根的个数不确定时：一般分 $\Delta$ 大于0，小于0和等于0三种情况；

当方程两根的大小不确定时：一般分 $x_1 < x_2$ ,  $x_2 < x_1$ 和 $x_1 = x_2$ 三种情况。

#### (2)解决实际问题

#### (3)解决三个二次间关系问题

①求参数的值； ②恒成立与能成立的问题。

## 例析

在两次购买同一商品时，不考虑商品的价格变化，采用两种不同方案：第一种方案，每次购买这种商品的数量一定；第二种方案，每次所花的钱数一定。问哪种方案比较省钱？

**思考1:**比较省钱的意思是什么？

采用这一方案时商品的平均价格较低一些

**解：**设两次购买时的单价分别为  $p_1$  和  $p_2$ ，

采用第一种时，设每次购买时的数量均为  $n$ ，则商品的平均价格为

$$\frac{p_1 n + p_2 n}{2n} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

采用第二种时，设每次所花的钱数均为  $m$ ，则商品的平均价格为

$$\frac{2m}{\frac{m}{p_1} + \frac{m}{p_2}} = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$$

$$\therefore \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{(p_1 + p_2)^2 - 2p_1 p_2}{2(p_1 + p_2)} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{2(p_1 + p_2)} \geq 0$$

**$\therefore$  采用第二种方案比较省钱**

在两次购买同一商品时，不考虑商品的价格变化，采用两种不同方案：第一种方案，每次购买这种商品的数量一定；第二种方案，每次所花的钱数一定。问哪种方案比较省钱？

**思考2：**你能用作比的方法来比较  $\frac{p_1 + p_2}{2}$  和  $\frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$  大小吗？

$$\frac{\frac{p_1 + p_2}{2}}{\frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}} = \frac{(p_1 + p_2)^2}{4p_1p_2} \geq \frac{(2\sqrt{p_1p_2})^2}{4p_1p_2} = 1$$

$$\because \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2} > 0 \quad \therefore \frac{p_1 + p_2}{2} \geq \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$$

**思考3：**你能所作的结论作一些推广吗？

(1)多次购买同一种商品时，采用每次所花钱数相同的方法，比较省钱。

(2)甲从A地到B地，前一半路程行走速度为 $v_1$ ，后一半路程的速度为 $v_2$ ，回来时，前一半时间行走速度为 $v_1$ ，后一半时间行走速度为 $v_2$ 。则甲回来时要慢一些。

# 练习

1. 下列不等式正确的有 (1) (2) (4)

(1) 若  $a > b$ ,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , 则  $ab < 0$ ; (2) 若  $bc - ad > 0$ ,  $ab < 0$ , 则  $\frac{c}{a} < \frac{d}{b}$ ;

(3) 若  $b > a > 0$ , 则  $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$ ;

(4) 若  $c > a > b > 0$ , 则  $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$ . 5)  $a > b > c > 0$ , 则  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

2. 设  $x = 2a(a+2) - 2$ ,  $y = (a-1)(a+3)$ , 则  $x$ 、 $y$  的大小关系是 **(B)**.

(A)  $x > y$  (B)  $x \geq y$  (C)  $x < y$  (D)  $x \leq y$

$$x - y = [2a(a+2) - 2] - (a-1)(a+3) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$$

3. 已知  $a = \frac{2022^3 + 1}{2022^4 + 1}$ ,  $b = \frac{2022^4 + 1}{2022^5 + 1}$ ,  $a, b$  的大小关系是  $a > b$ .

$$a - b = \frac{(2022^3 + 1)(2022^5 + 1) - (2022^4 + 1)^2}{(2022^4 + 1)(2022^5 + 1)}$$

$$= \frac{2022^3 + 2022^5 - 2 \times 2022^4}{(2022^4 + 1)(2022^5 + 1)} > 0$$

例2.已知  $a, b$  均为正数, 且  $a + b = ab - 3$ , 试用两种方法求  $a + b$  的最小值以及此时  $a$  的值。

解: 方法1

$$\because a > 0, b > 0$$

$\therefore$  由  $a + b = ab - 3$  得

$$a + b = ab - 3 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 3$$

(当  $a = b$  时取等号)

$$\text{即 } (a+b)^2 - 4(a+b) - 12 \geq 0$$

设  $a + b = x, x \geq 0$ , 则

$$x^2 - 4x - 12 \geq 0$$

解得  $x \geq 6$ , 或  $x \leq -2$  (舍去)

$$\text{即 } a + b \geq 6$$

$\therefore a + b$  的最小值为 6

此时  $a = b$ , 即  $a = 3$

方法2

$$\text{由 } a + b = ab - 3 \text{ 得 } b = \frac{a+3}{a-1}$$

$$\because a, b > 0 \quad \therefore a > 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a + b &= a + \frac{a+3}{a-1} \\ &= a + \frac{(a-1)+4}{a-1} = a + 1 + \frac{4}{a-1} \\ &= (a-1) + \frac{4}{a-1} + 2 \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{4}{a-1}} + 2 = 6$$

$$\text{当 } a-1 = \frac{4}{a-1}, \text{ 即 } a = 3 \text{ 时取等号。}$$

$\therefore a + b$  的最小值为 6

已知 $a, b$ 均为正数, 且 $ab - a - b = 0$ , 求 $ab$ 的最小值

以及此时 $a$ 的值。

解: 方法1

$$\because a > 0, b > 0$$

$\therefore$  由 $ab - a - b = 0$ 得

$$ab = a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

(当 $a = b$ 时取等号)

$$\text{即 } ab - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

设 $\sqrt{ab} = x, x \geq 0$ , 则

$$x^2 - 2x \geq 0$$

解得 $x \geq 2$ , 或 $x \leq 0$  (舍去)

$$\text{则 } ab = x^2 \geq 4$$

$\therefore ab$ 的最小值为4

此时 $a = b$ , 即 $a = 2$

方法2

由 $ab - a - b = 0$ 得  $b = \frac{a}{a-1}$

$$\because a, b > 0 \quad \therefore a > 1$$

$$\therefore ab = a \cdot \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$= \frac{(a-1)^2 + 2a - 1}{a-1}$$

$$= \frac{(a-1)^2 + 2(a-1) + 1}{a-1}$$

$$= (a-1) + \frac{1}{a-1} + 2$$

$$\geq 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{1}{a-1}} + 2 = 4$$

当 $a-1 = \frac{1}{a-1}$ , 即 $a = 2$ 时取等号。

$\therefore ab$ 的最小值为4

# 例析

例3.已知不等式关于  $(a-2)x^2 + 2(a-1)x + 4 \geq 0$

(1)若此不等式的解集为  $\{x \mid x \leq -2, \text{ 或 } x \geq -1\}$ , 求  $a$  的值;

(2)若此不等式恒成立, 求实数  $a$  的值或取值范围;

解: (1)由题意得,  $a > 2$ ,

且方程  $(a-2)x^2 + 2(a-1)x + 4 = 0$  的两根为 2 和 1

$$(-2) \cdot (-1) = \frac{4}{a-2}$$

$$\therefore a = 4$$

(2)当  $a-2=0$ , 即  $a=2$  时,

$(a-2)x^2 + 2(a-1)x + 4 \geq 0$  为  $2x+4 \geq 0$ , 不恒成立

当  $a-2 \neq 0$ , 即  $a \neq 2$  时,

由题意得  $\begin{cases} a > 2 \\ \Delta = [2(a-1)]^2 - 4 \times 4(a-2) \leq 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} a > 2 \\ a^2 - 6a + 9 \leq 0 \end{cases}$

$$\therefore a = 3$$

综上,  $a = 3$

### 跟踪训练

5. 若不等式  $ax^2 - 2x + 2 > 0$  对于满足  $1 < x < 4$  的一切实数  $x$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

**[解]**  $\because 1 < x < 4,$

$\therefore$  不等式  $ax^2 - 2x + 2 > 0$  可化为  $a > \frac{2x-2}{x^2}.$

令  $y = \frac{2x-2}{x^2}$ , 且  $1 < x < 4,$

则  $y = \frac{2x-2}{x^2} = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2},$

当且仅当  $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ , 即  $x = 2$  时, 函数  $y$  取得最大值  $\frac{1}{2},$

$\therefore a > \frac{1}{2}$  即为所求.

## 规律方法

对于恒成立不等式求参数范围问题常见类型及解法有以下两种：

### (1) 变更主元法

根据实际情况的需要确定合适的主元，一般知道取值范围的变量要看作主元.

### (2) 转化法求参数范围

已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的函数值的集合为  $B = \{y | m \leq y \leq n\}$ ,

则(1)  $y \geq k$  恒成立  $\Rightarrow y_{\min} \geq k$  即  $m \geq k$ ;

(2)  $y \leq k$  恒成立  $\Rightarrow y_{\max} \leq k$  即  $n \leq k$ .

# 课堂小结

请说说本章的主要思想方法有哪一些，能否举例说明体现在哪些地方？

## 1.函数与方程的思想方法：

将实际问题中的数量关系，通过设出自变量转化为函数或不等式；利用函数、方程、不等式的关系，解一元二次不等式，处理一元二次不等式恒成立等。

## 2.数形结合的思想方法：

基本不等式的几何解释；二次函数图象与二次方程的根，二次不等式解集的关系。

## 3.化归与转化的思想方法：

比较大小转化为判定差的符号；运用基本不等式进行式子的转化；二次函数、二次方程与二次不等式问题间的转化。

## 4.特殊与一般的思想方法：

应用基本不等式的一般结论求特殊实例中的最值；由特殊的二次函数、二次方程与二次不等式间的关系推广为一般的二次函数、二次方程与二次不等式间的关系，再用这个关系去解特殊的二次函数、方程和不等式问题

## 5.分类与整合的思想方法：

解含参一元二次不等式；恒成立问题中不等式类型的讨论

# 作业

1.教材P57-58复习参考题2 第4, 5, 6, 7题

2.(选做题)教材P58 第9题